**I** Soit un nombre réel $a > 0$, $a \neq 1$. Montrer que les graphes $\Gamma$ et $\Gamma_a$ des fonctions $y = \log x$ et $y = a \log x$ ont une tangente commune et qu'il existe une homothétie, dont on précisera le centre et le rapport en fonction de $a$, qui transforme $\Gamma_a$ en $\Gamma$.

**II** Soit $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$. On dit qu'une fonction $f$ définie pour $x > 0$ possède la propriété $\mathfrak{P}_a$, s'il existe $c \in \mathbf{R}$ et $k \in \mathbf{R}$, $k > 0$, $k \neq 1$, tels que l'homothétie de centre C $(0, c)$ et de rapport $k$ transforme le graphe $\Gamma_a$ de $y = af(x)$ en le graphe $\Gamma$ de $y = f(x)$.

1° Écrire la relation liant $f(kx)$ et $f(x)$ pour que l'homothétie de centre C et de rapport $k$ transforme $\Gamma_a$ en $\Gamma$.

2° Quelles sont les fonctions polynômes qui ont la propriété $\mathfrak{P}_a$ ?

**III** Soit $\mathcal{C}_1$ l'ensemble des fonctions continûment dérivables de $]0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$. On se donne 3 nombres réels $a, b, k$, tels que : $a > 0$, $k > 0$, $k \neq 1$. Soit $\mathcal{E}(a, b, k)$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}_1$ formé des fonctions $f$ vérifiant pour tout $x > 0$ la relation :

$$f(kx) = akf(x) + b$$

1° Soit $f \in \mathcal{C}_1$. Montrer qu'il existe une fonction unique $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que, pour tout $x > 0$, on ait : $f(x) = F(\log x)$. Montrer que F est continûment dérivable.

2° Soit $f \in \mathcal{E}(a, b, k)$. Montrer qu'il existe un nombre réel $p$ tel que la fonction $h$ définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$h(x) = e^{px} F'(x)$$

soit périodique. Montrer que, si la fonction $f$ n'est pas constante, ce nombre $p$ est unique.

3° Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions continues périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. A toute fonction $f \in \mathcal{E}(a, b, k)$, on sait donc faire correspondre une fonction périodique $h \in \mathcal{S}$. Soit $\Phi$ l'application de $\mathcal{E}(a, b, k)$ dans $\mathcal{S}$ telle que $h = \Phi(f)$ ; (lorsque $f$ est constante, $h = \Phi(f)$ est la fonction nulle).

Lorsque $ak \neq 1$, trouver l'image de $\Phi$, montrer que $\Phi$ est injective et calculer $\Phi^{-1}(h)$ lorsque $h \in \operatorname{Im} \Phi$.

Que se passe-t-il lorsque $ak = 1$?

4° Montrer que, si $f \in \mathcal{C}_1$ possède la propriété $\mathfrak{P}_a$, il existe $p \in \mathbf{R}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ et $h \in \mathcal{S}$ tels que :

$$f(x) = \int_0^{\log x} e^{-pt} h(t)\, dt + \lambda .$$

**IV** Soit toujours $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions continues périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et $\mathcal{S}_1$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}$ formé des fonctions continûment dérivables.

1° Soit $h \in \mathcal{S}$ ; montrer que l'ensemble de ses périodes, c'est-à-dire l'ensemble des réels $\tau$ tels que :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad , \quad f(x + \tau) = f(x) ,$$

est un sous-groupe de $\mathbf{R}$. Montrer que, si $h$ n'est pas constante, il existe une plus petite période strictement positive de $h$, soit T, telle que toute autre période $\tau$ soit un multiple entier de T.

2° Soit $h \in \mathcal{S}$ et $p \in \mathbf{R}$. Montrer que, si la relation $\int_0^{\tau} e^{-px} h(x)\, dx = 0$ est vérifiée par une période non nulle $\tau$ de $h$, elle l'est aussi par toute autre période de $h$.

Supposant cette relation vérifiée par toute période de $h$, montrer que, si l'on définit :

$$H(x) = e^{px} \int_0^x e^{-pt} h(t)\, dt \qquad \text{pour} \qquad x \in \mathbf{R}$$

alors la fonction H appartient à $\mathcal{S}_1$.

3° Réciproquement, soit $H \in \mathcal{S}_1$ et $p \in \mathbf{R}$. En supposant d'abord $H(0) = 0$, montrer que H admet le même sous-groupe de périodes que $H' - pH$.

**V** 1° Soit $f \in \mathcal{C}_1$. Montrer que, s'il existe $a$ tel que $f$ possède la propriété $\mathfrak{P}_a$, alors $f$ est de la forme (*) ou (**) suivante :

(*) $\qquad f(x) = x^{-p} H(\log x) + K$

(**) $\qquad f(x) = H(\log x) + m \log x + K$

où $p$, K, $m$ sont des nombres réels et H un élément de $\mathcal{S}_1$.

2° Réciproquement, soit $p \in \mathbf{R}$, $p \neq 0$, $K \in \mathbf{R}$ et $H \in \mathcal{S}_1$. Préciser quels sont les triplets $a, b, k$ tels que la fonction $f$ définie par (*) appartienne à $\mathcal{E}(a, b, k)$, et quelles sont les valeurs de $a$ pour lesquelles $f$ possède la propriété $\mathfrak{P}_a$.

Même question, si l'on se donne $m \in \mathbf{R}$, $K \in \mathbf{R}$, $H \in \mathcal{S}_1$ et si l'on définit $f$ par (**).

Quelles sont les fonctions $f \in \mathcal{C}_1$ qui possèdent la propriété $\mathfrak{P}_a$ pour tout $a$?

3° Caractériser les fonctions $f$ définies par (*) ou (**) et prolongeables par continuité à l'origine.

**VI** On suppose maintenant $a < 0$ (mais toujours $k > 0$, $k \neq 1$). Montrer que, pour certaines valeurs de $a < 0$, la fonction $f(x) = x^2 \sin \log x$ possède la propriété $\mathfrak{P}_a$. En reprenant la question III, caractériser les fonctions $f \in \mathcal{C}_1$ qui possèdent la propriété $\mathfrak{P}_a$ avec $a < 0$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail